Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Sommer 2016

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

		Note
Name		
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	17.08.2016	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Mit den Werten α und β wie in **a)**:

1. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von A.
2. Berechnen Sie $|\det(A)|$.

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und die zugehörigen Eigenvektoren $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ von A.

b) Zeigen Sie dass $x^T A x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und dass $x = 0$ falls $x^T A x = 0$.

c) Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

3. Gegeben sei die Ebene $U \subset \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$U := \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Berechnen Sie die Spiegelung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ bezüglich der Ebene U.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst einen zur Ebene U normalen Vektor $u \in \mathbb{R}^4$.

b) Gegeben seien im Urbildraum die Basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

und im Bildraum die Basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$$

durche welche Matrix B wird in diesem Fall A beschrieben?

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Mit den Werten α und β wie in **a)**:

1. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von A.
2. Berechnen Sie $|\det(A)|$.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$

& $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \quad 1 - \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 1}}$ ✓

$1 + \alpha - 2\beta = 2 - 2\beta = 1 - \beta \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\beta = 1}}$ ✓

b) 1) $\underline{\underline{Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}}$ ✓ $\quad \underline{\underline{R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}}$ ✓

2) $|\det(A)| = |\det(R)| = |\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}|$

$= |\sqrt{36}|$

$= \underline{\underline{6}}$ ✓

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und die zugehörigen Eigenvektoren $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ von A.

b) Zeigen Sie dass $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und dass $x = 0$ falls $x^T Ax = 0$.

c) Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

a) $\det(A - \lambda I_3) \overset{!}{=} 0$:

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad (4-\lambda)((2-\lambda)(4-\lambda) - 1) + (-(4-\lambda) - 1) - (1 + (2-\lambda)) = 0$

$= (4-\lambda)(8 - 6\lambda + \lambda^2 - 1) + \lambda - 5 - 3 + \lambda = 0$

$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) + 2\lambda - 8 = 0$

$$= (4-\lambda)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 7 - 2\right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 4}}$$

$$= \left(\lambda^2 - 6\lambda + 5\right) = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_2 = 5}} \quad \underline{\underline{\lambda_3 = 1}}$$

$\lambda_1 : (A - 4I_3)x = 0 :$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = t \quad x_2 = -t \quad x_1 = t$$

$$\underline{\underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$\lambda_2 : (A - 5I_3)x = 0 :$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = t \quad x_2 = 0 \quad x_1 = -t$$

$$\underline{\underline{E_5 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$\lambda_3 : (A - I_3)x = 0 :$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = 2t \\ x_1 = t \end{array}$$

$$E_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\} \checkmark$$

b) Theorem: Da A eine symmetrische Matrix ist gelten folgende äquivalente Aussagen:

- Alle Eigenwerte von $A \geq 0$
- A ist symmetrisch positiv definit

Wir haben in a) gezeigt, dass alle EW ≥ 0

$\Rightarrow$ A ist s.p.d.!

Für A s.p.d. gilt jedoch:

- $x^T A y := \langle x, y \rangle$

Aus der Definition des Skalarproduktes wissen wir:

- $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Daraus folgt nun:

$$x^T A x \geq 0, \quad x^T A x = 0 \iff x = 0$$

q.e.d. ✓

c) $$U = [u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ bilden eine Basis falls $\text{rang}(U) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix} \Rightarrow \text{rang}(U) = 3$$

✓ D

3. Gegeben sei die Ebene $U \subset \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$U := \left\{ \alpha \begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix}-1\\1\\3\\0\end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Berechnen Sie die Spiegelung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ bezüglich der Ebene U.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst einen zur Ebene U normalen Vektor $u \in \mathbb{R}^4$.

b) Gegeben seien im Urbildraum die Basis

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix} \right\},$$

und im Bildraum die Basis

$$\left\{ \begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\3\end{bmatrix} \right\},$$

durche welche Matrix B wird in diesem Fall A beschrieben?

a) u muss $\perp$ auf $u_{(1)}, u_{(2)}$ & $u_{(3)}$

$\Rightarrow$ alle u mit dim $= 3$ sind $\perp$ auf $u_{(3)}$

$\Rightarrow$ suchen $u \in \mathbb{R}^3$: $u \perp u_{(1)}$ & $u_{(2)}$:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\-3\\3\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{u = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}}$$

A ist eine Householdermatrix:

$$A = I_4 - \frac{2uu^T}{u^Tu} = \begin{bmatrix}1 & & & \emptyset\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \emptyset & & & 1\end{bmatrix} - \frac{2}{6} \cdot \begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & & & \emptyset\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \emptyset & & & 1\end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix}4 & -2 & 2 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix}-1 & 2 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}}}$$

b) A auf alte Basis anwenden und durch neue Basis beschreiben:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{A} \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\-4\\0\end{bmatrix} \overset{\text{Basiswechsel}}{\widehat{=}} \begin{bmatrix}1/6\\1/6\\-4/3\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{A} \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\8\\-5\\0\end{bmatrix} \widehat{=} \begin{bmatrix}-1/6\\8/6\\-5/3\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix} \xrightarrow{A} \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\\6\end{bmatrix} \widehat{=} \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix} \xrightarrow{A} \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\\3\end{bmatrix} \widehat{=} \begin{bmatrix}1/3\\-1/6\\-2/3\\1/3\end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 2\\ 1 & 8 & 2 & -1\\ -8 & -10 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

4. **a)** Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ und eine Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ von A. Wir betrachten für $b \in \mathbb{R}^n$ das folgende Ausgleichsrechnungsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$r := Ax - b$$

minimal wird. Zeigen Sie, dass

$$\|r\|_2^2 = \|\hat{S}V^T x - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2,$$

wobei $\hat{S} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $d_0 \in \mathbb{R}^n$ und $d_1 \in \mathbb{R}^{m-n}$ definiert sind durch

$$S = \left[\begin{array}{c}\hat{S}\\ \hline 0\end{array}\right], \qquad U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}.$$

b) Für ein Experiment betrachtet man das folgende Model

$$y = \beta_1 \sin(x) + \beta_2 \cos(x).$$

Zur Bestimmung der Parameter $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ liegen die folgende Messungen für y_i, $i = 1, 2, 3$, vor:

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
y_i	$\sqrt{2}$	1	1

Es sollen die Parameter β_1 und β_2 so bestimmt werden, dass $\sum_{i=1}^{3} |\beta_1 \sin(x_i) + \beta_2 \cos(x_i) - y_i|^2$ minimal wird.

Schreiben Sie dies als ein Ausgleichungsproblem der Form

$$A\beta = b$$

und lösen Sie es mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

5. Wir betrachten auf dem Vektorraum

$$\mathcal{L}^2[-1,1] := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_{-1}^{1} |f(t)|^2\, dt < \infty \right\},$$

das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \qquad f, g \in \mathcal{L}^2[-1,1].$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definiert.

b) Wir betrachten die Funktionen $f_k(t) = \sin(\pi k t)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $f_k \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sind.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $f_k \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ linear unabhängig sind.

d) Was ist die Dimension von $\mathcal{L}^2[-1,1]$?

Bitte wenden!

4. **a)** Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ und eine Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ von A. Wir betrachten für $b \in \mathbb{R}^n$ das folgende Ausgleichsrechnungsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$r := Ax - b$$

minimal wird. Zeigen Sie, dass

$$\|r\|_2^2 = \|\hat{S}V^T x - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2,$$

wobei $\hat{S} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $d_0 \in \mathbb{R}^n$ und $d_1 \in \mathbb{R}^{m-n}$ definiert sind durch

$$S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}.$$

b) Für ein Experiment betrachtet man das folgende Model

$$y = \beta_1 \sin(x) + \beta_2 \cos(x).$$

Zur Bestimmung der Parameter $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ liegen die folgende Messungen für y_i, $i = 1, 2, 3$, vor:

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
y_i	$\sqrt{2}$	1	1

Es sollen die Parameter β_1 und β_2 so bestimmt werden, dass $\sum_{i=1}^3 |\beta_1 \sin(x_i) + \beta_2 \cos(x_i) - y_i|^2$ minimal wird.

Schreiben Sie dies als ein Ausgleichsproblem der Form

$$A\beta = b$$

und lösen Sie es mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

a) $\|Ax-b\|_2^2 = \|r\|_2^2$

$\|USV^Tx - b\|_2^2 = \|r\|_2^2$

$\|U(SV^Tx - U^Tb\|_2^2 = \|r\|_2^2 \quad |$ U orth

$\|SV^Tx - \underbrace{U^Tb}_{d}\|_2^2 = \|r\|_2^2$

$\to UU^T = I$
$\to$ keine Auswirkung auf Norm

$\Leftrightarrow \|\hat{S}V^Tx - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2 = \|r\|_2^2$

b) $\sin(0) = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(0) = 1 \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b}$$

SVD:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

EW (A^TA): $\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 1$

$\sigma_1 = \sqrt{2} \qquad \sigma_2 = 1$

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EV: λ_1 : $(A^TA - 2I)x = 0$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 = t \quad x_1 = 0 \qquad E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\lambda_2 : (A^TA - I)x = 0 :$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\Rightarrow \underline{V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$u_{(1)} = \frac{1}{\sigma_1} A v_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}$$

$$u_{(2)} = \frac{1}{\sigma_2} A v_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}$$

$$u_{(3)} = u_{(1)} \times u_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \hat{S} V^T \beta = d_0$$

$$\beta = V \hat{S}^{-1} d_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$d = U^T b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{d_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \beta_1 = \sqrt{2}, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

✓

5. Wir betrachten auf dem Vektorraum

$$\mathcal{L}^2[-1,1] := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \middle| \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\},$$

das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \qquad f, g \in \mathcal{L}^2[-1,1].$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definiert.

b) Wir betrachten die Funktionen $f_k(t) = \sin(\pi k t)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $f_k \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $f_k \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ linear unabhängig sind.

d) Was ist die Dimension von $\mathcal{L}^2[-1,1]$?

a) Bedingungen für das Skalarprodukt:

1) $\langle a(t), \beta b(t) + \gamma c(t) \rangle \overset{!}{=} \beta \langle a(t), b(t) \rangle + \gamma \langle a(t), c(t) \rangle$

2) $\langle a(t), b(t) \rangle = \langle b(t), a(t) \rangle$ (da über $\mathbb{R}$)

3) $\langle a(t), a(t) \rangle \geq 0$, $\langle a(t), a(t) \rangle = 0 \Leftrightarrow a(t) = 0$

1) $\langle a(t), \beta b(t) + \gamma c(t) \rangle = \int_{-1}^{1} a(t)(\beta b(t) + \gamma c(t)) dt$

$= \int_{-1}^{1} (a(t)\beta b(t) + a(t)\gamma c(t)) dt$

$= \beta \int_{-1}^{1} a(t) b(t) dt + \gamma \int_{-1}^{1} a(t) c(t) dt = \beta \langle a(t), b(t) \rangle + \gamma \langle a(t), c(t) \rangle$ ✓

2) $\langle a(t), b(t) \rangle = \int_{-1}^{1} a(t) b(t) dt = \int_{-1}^{1} b(t) a(t) dt = \langle b(t), a(t) \rangle$ ✓

3) $\langle a(t), a(t) \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{a(t)^2}_{\text{stets positiv ausser für } a(t)=0} dt$ & wir wissen $a(t) \in \mathcal{L}^2[-1,1]$

$\therefore \int_{-1}^{1} |a(t)|^2 dt < \infty$

$a(t) = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} a(t)^2 dt = \int_{-1}^{1} 0 \, dt = 0$ ✓

b) $f_k(t) = \sin(\pi k t) \quad k \in \mathbb{N}$

$$\|f_{k_1}(t)\| = \langle f_{k_1}(t), f_{k_1}(t) \rangle$$

$$= \int_{-1}^{1} f_{k_1}(t)^2 \, dt = \int_{-1}^{1} \sin^2(\pi k_1 t) \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} (\underbrace{\cos(0)}_{1} - \cos(2\pi k_1 t)) \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \, dt - \int_{-1}^{1} \cos(2\pi k_1 t) \, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} t\right]_{-1}^{1} - \left[\sin(2\pi k_1 t) \cdot \frac{1}{2\pi k_1}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \underbrace{\left(\underbrace{\sin(2\pi k_1)}_{0\text{, da } k_1 \in \mathbb{N}} \cdot \frac{1}{2\pi k_1} + \underbrace{\sin(2\pi k_1)}_{0} \cdot \frac{1}{2\pi k_1}\right)}_{0}$$

$$= \underline{\underline{1}} \quad \Rightarrow \text{ gilt } \underline{\forall k_i \in \mathbb{N}}$$

$\Rightarrow$ normiert ✓

Orthogonalität:

$$\langle f_{k_i}(t), f_{k_j}(t) \rangle = \int_{-1}^{1} f_{k_i}(t) f_{k_j}(t) \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \sin(\pi k_i t) \sin(\pi k_j t) \, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \Big(\cos(\pi t \underbrace{(k_i - k_j)}_{k_m \in \mathbb{N}}) - \cos(\pi t \underbrace{(k_i + k_j)}_{k_n \in \mathbb{N}})\Big) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \cos(\pi t k_m) \, dt - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \cos(\pi t k_n) \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sin(\pi t k_m)}_{\substack{=0\ \forall k_m \in \mathbb{N} \\ \&\ t \in \{-1,1\}}}\frac{1}{\pi k_m}\Big]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sin(\pi t k_n)}_{\substack{=0\ \forall k_n \in \mathbb{N} \\ \&\ t \in \{-1,1\}}}\frac{1}{\pi k_n}\Big]_{-1}^{1}$$

$$\underbrace{\qquad}_{0} - \underbrace{\qquad}_{0}$$

$= \underline{\underline{0}} \Rightarrow$ <u>orthonormal</u> $\forall k \in \mathbb{N}$

c) Wir haben gerade gezeigt, dass alle f_{k_i}, f_{k_j} orthonormal zueinande sind für $i \neq j$ was lineare Unabhängigkeit <u>voraussetzt</u>!

Trotzdem zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{k_i}(t) \cdot t_i \stackrel{!}{=} 0 \iff t_i = 0$$

$$\Rightarrow f_{k_1}(t)\, t_1 + f_{k_2}(t)\, t_2 + \ldots + f_{k_j}(t)\, t_j + \ldots + f_{k_n}(t)\, t_n \stackrel{!}{=} 0 \mid \langle f_{k_j}(t) \ldots$$

$$\Rightarrow \langle f_{k_j}(t), f_{k_1}(t)\, t_1 + f_{k_2}(t)\, t_2 + \ldots + f_{k_j}(t)\, t_j + \ldots + f_{k_n}(t)\, t_n \rangle \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff \underbrace{\langle f_{k_j}(t), f_{k_1}(t)\rangle}_{0} t_1 + \underbrace{\ldots}_{0} + \underbrace{\langle f_{k_j}(t), f_{k_j}(t)\rangle}_{1} t_j + \underbrace{\ldots}_{0} + \underbrace{\langle f_{k_j}(t), f_{k_n}(t)\rangle}_{0} t_n \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \underline{\underline{t_j \stackrel{!}{=} 0}} \Rightarrow$ kann man $\forall j \in [0, n]$ machen

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_1 = t_2 = \ldots = t_j = \ldots = t_n = 0}}$$

d) Unendlich dimensional, wir haben alleine schon ∞ mögliche $k \in \mathbb{N}$ für unsere Sinusfunktion?

6. Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

b) Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ so dass $Av = 0$. Dann kann das Gleichungssystem $Ax = b$ *nicht* für beliebige rechte Seite b lösbar sein.

c) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ungleich null. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

d) Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Dann gilt $\det(A) = 1$.

e) Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \quad \mathcal{P}^3 &\longrightarrow \mathcal{P}^4 \\ f(x) &\longmapsto \tfrac{d}{dx}\left(x^2 f(x)\right) \end{aligned}$$

ist linear.

f) Gegeben sei die Matrix

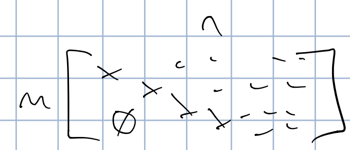
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) false

b) false



c) true

d) false ± 1

e) true

f) $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2$

$\sigma_1 = \sqrt{3} \qquad \lambda_2 = \sqrt{2}$

false

6. Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

b) Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ so dass $Av = 0$. Dann kann das Gleichungssystem $Ax = b$ *nicht* für beliebige rechte Seite b lösbar sein.

c) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ungleich null. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

d) Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Dann gilt $\det(A) = 1$.

e) Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ definiert durch

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{P}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P}^4 \\ & f(x) & \longmapsto & \frac{d}{dx}\left(x^2 f(x)\right) \end{array}$$

ist linear.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und die zugehörigen Eigenvektoren $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ von A.

b) Zeigen Sie dass $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und dass $x = 0$ falls $x^T Ax = 0$.

c) Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

a)

$$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(4-\lambda)((2-\lambda)(4-\lambda)-1) + (-(4-\lambda)-1) - (1+(2-\lambda))$$

$$(4-\lambda)((2-\lambda)(4-\lambda)-1) + \lambda - 5 + \lambda - 3$$

$$(4-\lambda)((2-\lambda)(4-\lambda)-1) + 2\lambda - 8$$

$$(4-\lambda)(8-6\lambda+\lambda^2-1) + 2\lambda - 8 \qquad \underline{\underline{\lambda_1 = 4}}$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7 - 2)$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_2 = 5 \qquad \lambda_3 = 1$$